МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования   
**«Национальный исследовательский**   
**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

**(ННГУ)**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

**Кафедра: высокопроизводительных вычислений и системного**

**программирования**

Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»

Магистерская программа: «Вычислительные методы и суперкомпьютерные технологии»

**ОТЧЕТ**

по второй лабораторной работе

на тему:

**«**Численное исследование авторепрессора с задержкой**»**

**Выполнил:** студент

группы 3824М1ПМвм

Ивлев А.Д.

Нижний Новгород  
 2024

**Оглавление**

[1. Введение 3](#_Toc197027849)

[2. Постановка задачи 4](#_Toc197027850)

[3. Результаты экспериментов 6](#_Toc197027851)

[4. Заключение 9](#_Toc197027852)

## Введение

В данной работе будет исследоваться модель авторепрессора с задержкой, которая задаётся нелинейным ДУ 1-го порядка:

*(1)*

Где – концентрация белка, - время, – задержка обратной связи в синтезе белка, – степень олигомера, – коэффициент скорости синтеза белка.

Следовательно, из постановки задачи получим ограничения на модель авторепрессора: , , , , . При этом данная система является бесконечномерной, так как начальные условия необходимые для постановки и решения задачи Коши задаются всеми значениями в промежутке .

Из определения состояния равновесия можно сделать вывод, что если оно существует, то, находясь в нём, с некоторого момента будет верно равенство . Следовательно, состояние равновесия модели авторепрессора с задержкой совпадает с моделью без задержки. Оно существует и единственно, а найти его можно найти из решения уравнения:

(2)

Но при этом добавление задержки влияет на устойчивость и вид состояния равновесия. Дальнейшая работа направлена на определения типа устойчивости данной модели.

## Постановка задачи

Как было сказано выше для модели авторепрессора с задержкой состояние равновесия будет единственным. И оно может быть найдено числено как решения уравнения .

Для определения типа устойчивости линеаризуем систему (1) вблизи состояния равновесия с помощью замены: , при . Тогда . По определению и пусть обозначим , . В состоянии равновесия можно преобразовать коэффициент , используя соотношение : .

После преобразований исследуемое уравнение примет вид:

(3)

Тогда будем искать решение в виде Тогда после подстановки получим характеристическое уравнение . Существует бесконечное количество решений, поэтому исследуем зависимость изменения устойчивости от параметров системы. Необходимым условием бифуркации является условие , то есть чисто мнимые. Тогда пусть . Сравнивая действительную и мнимую часть уравнения, получим систему:

Её можно переписать в виде:

Путём возведения в квадрат первого выражения и подстановки второго можно вывести соотношение: , после подстановки можно получить взаимосвязь и : .

Также, после подстановки a и b в первое уравнение можно выразить зависимость от параметров: . Если явно выразить , подставив , получим выражение:

*(4)*

Причём состояние равновесия зависит только от параметров , и не зависит от . Следовательно, , ) – бифуркационная граница устойчивости, которая существует при .

* В рамках данной работы необходимо построить данную бифуркационную кривую , ) при фиксированных и . И исследовать области параметров на устойчивость состояния равновесия.
* Исследовать поведение системы при .

## Результаты экспериментов

Программная реализация выполнялась на языке python. Полный код доступен по ссылке: <https://github.com/Faert/NLD_Lab>.

Для вычисления по формуле (4) необходимо сначала вычислить состояние равновесия из решения уравнения (2). Вычисления будут проводиться численно методом деления отрезка пополам. График состояния равновесия представлен на рисунке 1.

**Метод деления отрезка пополам:**

1 | def Div\_2(func, a = 0, b = 1, max\_iter = 1000, eps = 0.001, history = None):

2 |     for i in range(max\_iter):

3 |         c = (a+b)/2

4 |         res\_c = func(c)

5 |         if(history != None):

6 |             history[0].append(abs(a-b))

7 |             history[1].append(abs(res\_c))

8 |         #if(abs(a-b) < eps):

9 |         if(abs(res\_c) < eps):

10|             return c

11|         if (np.sign(res\_c) == np.sign(func(a))):

12|             a = c

13|         else:

14|             b = c

15|     return c

Где func – функция, у которой ищутся корни, a и b – границы отрезка поиска, max\_iter -–максимальное количество итераций, eps – желаемое значение точности, history – ссылка на список, где храниться история изменение точности.

Для дальнейшего исследования зафиксируем параметр желаемую точность , максимальное количество итераций , а критерий остановки по значению функции. Исследование зависимости от параметра будет проводиться в диапазоне 0, 10]. Можно заметить, что , поэтому возьмём границы метода деления пополам: a = 0, b = 10.

Изображение выглядит как линия, График, диаграмма, текст

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Рисунок 1. Зависимость состояния равновесия от параметра при ,

Исследуем существование бифуркационной кривой. Условие её существования , поэтому числено вычислим . На рисунке 2 можно заметить, что условие существования бифуркационной кривой не выполняется при малых . Но при этом порог существования уменьшается с ростом параметра .

*Изображение выглядит как линия, График, диаграмма, Параллельный

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.*

Рисунок 2. Зависимость условия параметра b от параметра при ,

Теперь с учетом условия существования построим бифуркационную кривую (Рисунок 3). В близи границы существования она стремиться в бесконечность, а при увеличении она стремится к некоторому постоянному значению, которое больше 0. То есть данная кривая разбивает плоскость параметров на две области.

Изображение выглядит как линия, текст, диаграмма, График

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Рисунок 3. Бифуркационная кривая при и ,

Сначала рассмотрим область под кривой. Можно заметить, что туда входит прямая . При данных значения параметра задача сводится к рассмотренной в первой лабораторной, где существует единственное устойчивое состояние равновесия. Следовательно, устойчивость будет наблюдаться и для всех прочих точек из данной области.

При переходе через бифуркационную кривую из области под кривой. Появляется неустойчивость состояния равновесия и возникают автоколебания. Далее исследуем, что происходит при переходе через другие кривые при . Для этого зафиксируем .

Изображение выглядит как текст, линия, График, диаграмма

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Рисунок 4. Бифуркационная кривая при и ,

При рассмотрении рисунка 4 можно отбросить кривые, заданные параметром , так как они находятся в области . Прочие же кривые не пересекаются и располагаются друг над другом в соответствии с возрастанием . Но после повторного перехода ничего не измениться, так как мы уже перешли от устойчивого состояния к автоколебаниям.

## Заключение

Для исследования устойчивости системы с задержкой была числено построена бифуркационная кривая (4) и выведено условия её существования:.

Данная кривая разделила плоскость параметров на две области, где область под кривой задаёт устойчивое состояние равновесия, а над кривой автоколебательный процесс.